به نام خدا

مبحث:
گزاره نماها و سورها

گزاره نماها

متغیرهایی مانند x و y در ریاضی اغلب برای نشان دادن مقدارهای نامشخص به کار می‌روند. از متغیرها زمانی استفاده می‌کنیم که علاقه‌مند باشیم بدانیم «ویژگی‌ها» با توجه به مقادیری که برای آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، درست است یا نادرست.

گزاره‌نما به طور ساده، جمله‌ای است که بیان می‌کند متغیرهای خاصی، واجد یک ویژگی هستند.

به طور مثال «x یک عدد است»، یک گزاره‌نما است و ما می‌توانیم آن را با نماد $N(x)$ نشان دهیم. البته درستی یا نادرستی $N(x)$ وقتی مشخص می‌شود که مقدار x داده شده باشد. به طور مثال $N(۴)$، که بیان می‌کند «۴ یک عدد است»، به وضوح درست است.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسوی پور

وقتی توجه ما به عناصر مجموعه خاصی باشد، آن مجموعه را **جهان سخن** می‌نامیم.

- مثال:

اگر درباره عددهای حقیقی صحبت می‌کنیم، جهان سخن ما $\mathbb{R}$، مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود. به علاوه، هر گزاره که در یک جهان سخن خاص بیان می‌شود، فقط برای عناصر همان جهان به کار می‌رود.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

برای $P(x)$ داده شده که ویژگی‌ای را درباره متغیر x بیان می‌کند، اغلب می‌خواهیم که $P(x)$ برای هر عنصر x در جهان سخن درست باشد. به علاوه، زمان‌هایی هست که می‌خواهیم این حقیقت را بیان کنیم که برای حداقل یک x در جهان، $P(x)$ درست است.

در این موارد از سورهایی مانند $\forall$ و $\exists$ استفاده می‌کنیم.

- سور $\forall$ به معنی «برای همه» است و سور عمومی نامیده می شود.
- سور $\exists$ به معنی «وجود دارد» است و سور وجودی نامیده می شود.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

$\forall x\, P(x)$ یعنی $P(x)$ برای هر x درست است.

$\exists x\, P(x)$ یعنی xای وجود دارد که $P(x)$ درست است.

هر گزاره‌ای به صورت $\forall x\, P(x)$ یک گزاره عمومی و هر گزاره به صورت $\exists x\, P(x)$ یک گزاره وجودی نامیده می‌شود.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

- تمرین:

۱. فرمول $\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$ را به فارسی بیان کنید.

۲. فرمول $\forall y\, \exists x\, (y \notin x)$ را به فارسی بیان کنید.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

تعاریف زیادی با عبارت‌هایی مانند «برای هر» یا «وجود دارد» شروع می‌شوند. البته درستی یا نادرستی یک گزاره مسور بستگی به جهان سخن دارد. فرض کنیم x متغیری در $P(x)$ باشد. در دو گزاره $\forall x\, P(x)$ و $\exists x\, P(x)$، می‌گوییم x یک متغیر محدود است زیرا یک سور، x را محدود کرده است.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

به بیان دیگر، اگر در یک گزاره یک متغیر بلافاصله بعد از یک سور بیاید، آن متغیر را به عنوان متغیر محدود می‌شناسیم. اگر در یک گزاره، یک متغیر با یک سور محدود نشود، آن متغیر را متغیر *آزاد* می‌نامیم. وقتی یک متغیر آزاد باشد می‌توانیم جایگزینی انجام دهیم، یعنی می‌توانیم هر کدام از مقادیر جهان سخن را به جای آن قرار دهیم -شاید ۰ یا $\varnothing$.

به عنوان مثال حکم $\forall x\ (P(x) \to x = y)$ دارای متغیر آزاد y است. بنابراین می‌توانیم یک جایگزینی به صورت $\forall x\ (P(x) \to x = ۲)$ انجام دهیم. اگر در یک متن داده شده همه متغیرهای آزاد با مقدارها جایگزین شوند، می‌توانیم درستی یا نادرستی گزاره را مشخص کنیم.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

علاوه بر سورهای $\forall$ و $\exists$، اغلب از محدود کننده سورها استفاده می‌شود تا سورها را به مجموعهٔ خاصی از مقادیر محدود کند.

به طور مثال برای بیان این موضوع که هر عدد حقیقی x در $P(x)$ صدق می‌کند، کافی است به سادگی بنویسیم $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x)$. به طور مشابه برای گفتن اینکه برخی عددهای حقیقی x واجد شرایط $P(x)$ هستند، می‌توانیم بنویسیم $(\exists x \in \mathbb{R})\ P(x)$.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

تعریف ۱.۳.۱ . (مجموعه محدودکننده سورها) فرض کنیم A یک مجموعه باشد. برای نشان دادن اینکه برای هر x در A، $P(x)$ درست است می‌توانیم بنویسیم $(\forall x \in A)\ P(x)$. همچنین می‌توانیم بنویسیم $(\exists x \in A)\ P(x)$ برای اینکه نشان دهیم xای در A وجود دارد که $P(x)$ درست است.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

توجه کنید که جمله‌ی **برای هر x** بسیار کلی است و ممکن است شامل اشیایی شود که برای آن‌ها شرط $P(x)$ بی‌معنی باشد. از این رو، اغلب تغییرات x را در مجموعه‌ای چون A محدود می‌کنیم و می‌نویسیم $\forall x \in A, P(x)$. روشن است که اگر A را تغییر دهیم، گزاره‌ی دیگری به دست می‌آید.

برای مثال، اگر x در مجموعه‌ی $B = \{$**علی کریمی، کریم باقری، علی دایی**$\}$ تغییر کند، گزاره‌ی "**برای هر** $x \in B$، x **فوتبالیست است**" گزاره‌ای **درست**، و اگر x در مجموعه‌ی

A=$\{$**علی دایی، دکتر کرمزاده ، دکتر بهزاد، دکتر محمودی، دکتر ابراهیمی**$\}$

تغییر کند، گزاره " $x \in A$ **وجود دارد که** x **فوتبالیست است**" گزاره‌ای **درست** است.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

- **مثال:** درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

(الف) $(\exists \circ \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x + \circ = x = \circ + x)$.

(ب) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists x' \in \mathbb{Z}) \quad (x + x' = \circ = x' + x)$.

(پ) $(\exists k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x + k = \circ = k + x)$.

- حل) (الف) درست است. چون جمع ۰ با هر عدد صحیح برابر باجمع آن عدد با ۰ و برابر با خود آن عدد می شود.
- (ب) درست است. چون برای هر عدد صحیح x می توانیم عددی پیدا کنیم(-x) که جمع x با آن، برابر ۰ می شود.
- (ج) نادرست است. چون عددی مانند k وجود ندارد که حاصل جمع آن با هر عدد صحیح برابر با ۰ شود.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

عبارت $(\forall x \in A)\ P(x)$ به این معنی است که برای هر x، اگر x در A باشد، $P(x)$ درست است. به طور مشابه عبارت $(\exists x \in A)\ P(x)$ به این معنی است که xای وجود دارد که $x \in A$ است و $P(x)$ درست است. بنابراین هم‌ارزی‌های منطقی زیر را داریم،

۱. $(\forall x \in A)\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow P(x))$،

۲. $(\exists x \in A)\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge P(x))$.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

زمان‌هایی در ریاضی وجود دارند که نیاز داریم ثابت کنیم فقط یک مقدار وجود دارد که در یک ویژگی صدق می‌کند. سور دیگری وجود دارد که گاهی اوقات استفاده می‌شود اما خیلی متداول نیست. این سور، سور یکتایی نامیده می‌شود. این سور به صورت $\exists! x\ P(x)$ و به این معنی است که «فقط یک x وجود دارد که برای آن، $P(x)$ درست است.»

به طور مثال

$$(\exists!\, x \in \mathbb{N})\ x - 3 = 0.$$

- تمرین: آیا می توانیم سور یکتایی را به کمک سور وجودی و سور عمومی بنویسیم؟ چطور؟

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

نقیض سورها

در این بخش به معرفی قانون‌های منطقی می‌پردازیم که مربوط به نقیض گزاره‌های مسور است. فرض کنیم $P(x)$ یک گزاره‌نما باشد. گزاره $\forall x\ P(x)$ به این معنی است که «برای هر x، $P(x)$ درست است». بنابراین عبارت $\sim \forall x\ P(x)$ به این معنی است که xای وجود دارد که برای آن $P(x)$ درست نیست که می‌تواند به صورت $\exists x\ \sim P(x)$ بیان شود. همان‌طور که نشان می‌دهیم این استدلال برگشت‌پذیر است.

گزاره $\exists x\ \sim P(x)$ به این معنی است که « xای وجود دارد که $P(x)$ به ازای آن نادرست است». بنابراین $P(x)$ برای هر x درست نیست یا به عبارت دیگر $\sim \forall x\ P(x)$. بنابراین $\sim \forall x\ P(x)$ و $\exists x\ \sim P(x)$ به طور منطقی هم‌ارز هستند.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

با استدلال مشابه می‌توانیم نشان دهیم که $\sim \exists x\, P(x)$ و $\forall x \sim P(x)$ نیز هم‌ارز هستند.

- یعنی:

گزاره‌ی $\forall x \in A, P(x)$ **نادرست** است اگر و تنها اگر **دست کم یک عضو** (**حتی یک عضو**) چون a در A وجود داشته باشد به طوری که $P(a)$ نادرست باشد!

و گزاره‌ی $\exists x \in A, P(x)$ **نادرست** است اگر و تنها اگر **هیچ** عضوی چون $a \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $P(a)$ درست باشد.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

قانون‌های نفی سور ۲.۳.۱. برای هر گزاره‌نمای $P(x)$، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را داریم،

۱. $\sim \forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$،

۲. $\sim \exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x \sim P(x)$.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

استدلال بالا که برای توجیه قانون نقیض سورها به کار بردیم، می‌تواند برای دو قانون نقیض و برای مجموعه محدودکننده سورها هم به کار رود. دو قانون منطق بعدی نشان می‌دهد که برای مجموعه A و گزاره‌نمای $P(x)$ داده شده، نقیض چطور روی گزاره‌هایی به صورت $(\forall x \in A)\ P(x)$ و $(\exists x \in A)\ P(x)$ اثر می‌گذارد.

قانون‌های نقیض سور محدودکننده ۳.۳.۱. برای هر گزاره‌نمای $P(x)$، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را داریم،

۱. $\sim (\forall x \in A)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x \in A) \sim P(x)$،

۲. $\sim (\exists x \in A)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \sim P(x)$.

توجه کنید که وقتی علامت نقیض را برای یک مجموعه محدودکننده سورها می‌گذارید، سور تغییر می‌کند و علامت نقیض به بعد از «$x \in A$» انتقال پیدا می‌کند.

تهیه کننده: دکتر منصوره مو

- مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ \forall x(\underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{P(X)} \rightarrow \underbrace{|f(x)-L| < \varepsilon}_{Q(X)})$
- حل) با توجه به نامگذاری های بالا، گزاره را دوباره نویسی می کنیم.

$$\forall \varepsilon >, \exists \delta > \cdot;\ \forall x(0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon >, \exists \delta > \cdot;\ \forall x(\sim P(x) \vee Q(x))$$

اکنون نقیض گزاره بالا را به دست می آوریم.

$$\sim(\forall \varepsilon >, \exists \delta > \cdot;\ \forall x\big(\sim P(x) \vee Q(x)\big))$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon >, \forall \delta > \cdot;\ \exists x\big(P(x) \wedge \sim Q(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon >, \forall \delta > \cdot;\ \exists x(0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-L| \geq \varepsilon)$$

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور

- تمرین: نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

(الف) $(\exists \circ \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x + \circ = x = \circ + x)$.

(ب) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists x' \in \mathbb{Z}) \quad (x + x' = \circ = x' + x)$.

(پ) $(\exists k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (x + k = \circ = k + x)$.

تهیه کننده: دکتر منصوره موسی پور